# 作业 4

11 丛宇 202411081537

May 9, 2025

## 第六章

3. 由欧拉公式 $\phi = m+2-n \le 3n-6+2-n = 2n-4$.

4. 1. 由于极大平面图所有 face degree 都是 3, 有 $3\phi = 2m$. 由欧拉公式 $n+2m/3-m=2$ 得到 $m=3n-6$
   2. $\phi = 2m/3 = 2n-4$
   3. 对 $n$ 归纳, $n=4$ 时显然成立. 假设 $G$ 为 $k$ 个点的极大简单平面图. 若 $\kappa(G)=1$, $G$ 中一定包含 degree 是 1 的点 (简单图), 与极大简单平面图矛盾; 若 $\kappa(G)=2$, 则存在两个点 $u,v \in G$ s.t. $G-\{u,v\}$ 使 $G$ 不联通. 那么在 $G$ 一定可以表示成两个图 $G_1, G_2$ 的 2-clique sum. 但是由于 $n>4$, 平面图 $G_1$ 与 $G_2$ 都包含 $u,v$ 之外的点, 一定存在 $x \in G_1, y \in G_2$ s.t. $G+(x,y)$ 仍然是平面图, 与极大简单平面图假设矛盾. 因此 $\kappa(G) \ge 3$.

5. 显然. 假设 $G$ 并非极大可平面图, 则存在 $e \notin E$ s.t. $G+e$ 仍然是平面图. 与 $n$ 个点的平面图边数 $\le 3n-6$ 矛盾.

6. 1. 容易发现 $n \le 4$ 时不是简单图,$n=5$ 时不是平面图. 所以 $n \ge 6$. 假设 $G$ 中只有 5 个顶点的度数不超过 5, 有 $2m \ge 5+16+6(n-5)$, 得到 $m \ge 3n-4.5$ 与 $m=3n-6$ 矛盾
   2. 若 $G$ 中只有 11 个点度数为 5, 有 $2m \ge 11*5+6(n-11)$, 得到 $m \ge 3n-11/2$ 与 $m=3n-6$ 矛盾

8. 1. 如果 $G$ 有度数为 2 的点 $u$, 由于 $n \ge 4$ 一定存在一个点 $v$ 与 $u$ 不相邻, 显然 $G+(u,v)$ 仍然是平面图
   2. 假设只有两个度数 $\le 5$ 的点, $2m \ge 6(n-2)+2$, $m \ge 3n-4$ 矛盾
   3. $2m \ge 6(n-3)+9$, $m \ge 3n-4.5$

25. 1. matroid $M$ 中的 cocircuit = dual matroid $M^*$ 中的 circuit. planar graph 对应的 graphic matroid dual = planar dual graph 上的 graphic matroid. (互为对偶, 只需要证明一边. 假设 $G$ 的 cycle $C$ 在 $G^*$ 中的对应 $C^*$ 不是 cut, 那么令 $C$ 内部的某个 face 对应的顶点为 $v^*$, 在 $G^*$ 中存在 $(v^*,u^*) \in E$ s.t. $u^*$ 对应的 face 不在 $C$ 中. 显然 $C$ 不是 cycle) 2. Euler 图的 cut 大小一定是偶数. 由 1 知对偶图中所有 cycle 长度都是偶数. 无奇环一定是二分图.

## 第七章

2. 由推论 2, 简单图点数 $2k+1$, 边数 $m = \Delta n/2 = \frac{2k+1}{2}\Delta > k\Delta$, 所以 $\chi' = \Delta+1$.

3. 如果所有 cycle 长度都是偶数, $G$ 是二分图, $\chi' = \Delta$. 如果所有 cycle 长度都是奇数, 由于两个 cycle 的对称差还是 cycle, 观察到任意两个奇环不能共用边, 只能共用点. 将每个奇环看成一个点, 共用顶点的奇环之间连边, 得到的图一定是 forest, 否则包含简单偶环. 由于每个奇环只需要 3 种颜色即可染色且奇环之间形成树 (要求 $G$ 联通), 容易看出 $\chi' \leq \Delta$.

4. 对 $n$ 归纳, base case 是 $P_3$, 显然成立. 假设对所有 $k \leq n-1$ 阶满足条件的简单图都有 $\chi' = k-1$. 现在考虑 $k$ 阶满足条件的简单图 $G$, 其中 $\deg(v) = k-1$. $G - v$ 满足归纳假设, 有一个 $k-2$ 边染色, 所以一定存在一个 $k-1$ 边染色. 重复使用 $k-1$ 次引理 1 容易推出 $G$ 也可 $k-1$ 边染色.

5. 如果 $G$ 不含任何奇圈, 那么是二分图, $\chi = 2$. 如果 $G$ 只有一个奇圈, 显然 $\chi = 3$. 如果 $G$ 有多个奇圈, 取其中一个, 记为 $C$, $C$ 可以 3 染色. 考虑 $G \setminus C$, 由于任何两个奇圈都共用顶点, 所以 $G \setminus C$ 没有奇圈, 是二分图, 可以 2 染色. 所以 $\chi(G) \leq 2 + 3 = 5$.

9. 令 $e = (u, v)$, 假设 $G \setminus e$ 颜色最少的染色中 $u, v$ 颜色相同, 则该染色在 $G/e$ 中也是可行的染色且 $G/e$ 中任何可行的染色都得到 $G \setminus e$ 中 $u, v$ 颜色相同的一个染色. 假设 $G \setminus e$ 颜色最少的染色中 $u, v$ 颜色不同, 同理任何一种染色对应着 $G$ 的染色. 因此 $\chi(G \setminus e) = \min(\chi(G), \chi(G/e))$.

34. $P_k(C_n) = P_k(P_n) - P_k(C_{n-1}) = k(k-1)^{n-1} - P_k(C_{n-1})$ 展开得到 $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

35. $\sum_{i=0}^{k}[(i-1)^n + (-1)^n(i-1)](k-i)$

# 第九章

2.

5. 1 强联通. 2 单向联通. 3. 弱联通 4. 单向联通 5. 强联通 6. 强联通

7. 略

11. 对子树 (点数) 做归纳. base case 是只包含一个点的二元树, 显然成立. 对 $T$ 中的所有非叶子节点 $u$, 存在一个以 $u$ 为根的二元树, 其左右子树都满足性质 $m = 2t - 2$, 因此 $m' = m_1 + m_2 + 2 = 2t_1 + 2t_2 - 4 + 2 = 2t - 2$.