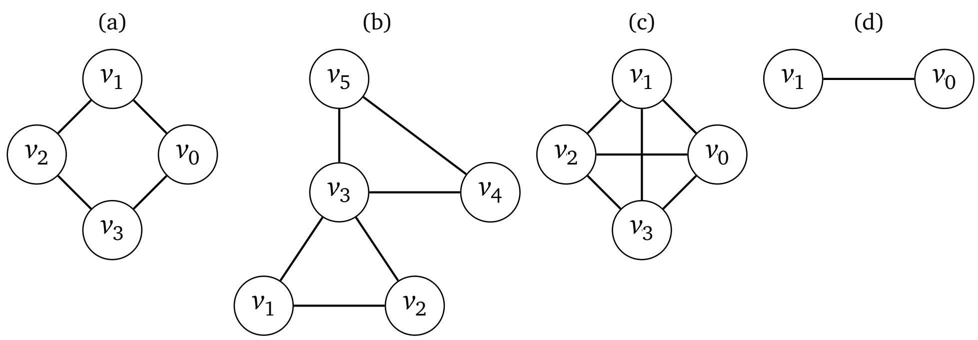
作业 3

11 丛宇 202411081537

第四章

1. a 四个奇点不行; b 可以; c 两个奇点不行; d 可以

3. 

4. 归纳. $n = 3$ 时显然成立. 假设对所有 $n \le k$ 成立, 现在考虑 $n = k+1$. $m = \frac{k(k-1)}{2} + 2$. 取 v 为 $\deg(v)$ 最小的点, $G \setminus \{v\}$ 的边数 $m' \ge \frac{k(k-1)}{2} + 2 - (k-1) \ge \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 2$. 由归纳假设 $G \setminus \{v\}$ 包含 Hamilton cycle. 由于 $\deg(v) \ge 2$, G 也包含 Hamilton cycle.

5. $S = \{i, g, k, p, b, d\}$, $\omega(G \setminus S) = 7 > 6 = |S|$.

10.
    - G 不是 2-connected 则存在两点 u, v 之间只有一条 vertex disjoint path. 假设 G 有 Hamilton cycle, 则 u, v 之间存在两条 vertex disjoint path. 矛盾.
    - 假设二分图 G 存在 Hamilton cycle, $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$, 则所有奇数编号点属于 X, 所有偶数编号点属于 Y 且 $|X| = |Y|$. 与假设 $|X| \ne |Y|$ 矛盾.

12. 令 $d'_1 \le \cdots \le d'_n$ 为 $G + (u, v)$ 的度序列, 令 $d_1 \le \cdots \le d_n$ 为 G 的度序列. 由于 d' 中只有两个位置与 d 不同且都只 $+1$, 不妨假设两个序列对应顶点相同. 因此 $d'_m \le d_m + 1 \le m$ 或 $d'_{n-m} \le d_{n-m+1} < n - m$ 对 $G + (u, v)$ 成立. 由定理 8, $G + (u, v)$ 一定包含 Hamilton cycle, 因此 G 中一定有 Hamilton path.

13. 假设 G 不是 Hamilton 图, 那么存在 $m < n/2$, G 度弱于 $C_{m,n}$.

$$\begin{aligned}
|E(G)| &\le |E(C_{m,n})| \\
&\le \frac{1}{2}[m^2 + (n-2m)(n-m-1) + m(n-1)] \\
&= \binom{n-\delta}{2} + \delta^2 - \frac{1}{2}(m-\delta)(2n-3m-3\delta-1) \\
&\le \binom{n-\delta}{2} + \delta^2
\end{aligned}$$

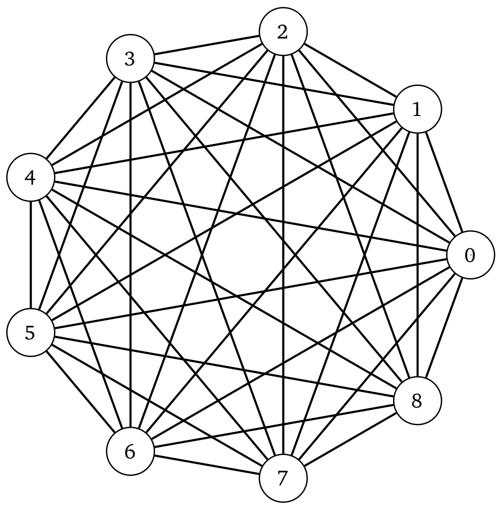
最后一个不等号是观察到 $m \geq \delta$, $2n-3m-3\delta-1 > n/2-3\delta-1 \geq -1$. 有 $2n-3m-3\delta-1 \geq 0$ (是整数).

因此与假设矛盾.

第五章

2. 考虑 T 中任何 $\deg(v)=1$ 的点, 如果存在完美匹配, 与叶子相连的边都在匹配中. 可以确定性的知道 T 中所有边是否在匹配中. 因此完美匹配唯一 (如果存在).

5. 3, 5

7. 

cycles: $\{1,2,8,3,7,4,6,5,9\}$, $\{2,3,1,4,8,5,7,6,9\}$, $\{3,4,2,5,1,6,8,7,9\}$, $\{4,5,3,6,2,7,1,8,9\}$

13. 找 $K_{5,5}$ 的最小权重完美匹配. 30

14. SDR 等价于 bipartite matching 等价于 Hall's Theorem, 略

18. 等价于证明 Tutte–Berge formula.

    Proof: 令 $d = \frac{1}{2}\min_{S \subseteq V} |V| - o(G-S) + |S|$, $\nu(G)$ 是 G 的最大匹配的大小. 考虑任意点集 $U \subseteq V$, 有 $\nu(G) \leq |U| + \nu(G-U) \leq |U| + 1/2(|V \setminus U| - o(G-U))$ 因为 $G-U$ 的每个 odd component 都至少有一个点不能被匹配到. 因此 $\nu(G) \leq d$. 下面证明 $d \leq \nu(G)$.

    需要证明 $\exists S \subseteq V$ 使 $|V|+|S|+o(G-S) = \nu(G)$. 满足条件的 S 是 Edmonds-Gallai decomposition. 所以 $d \leq \nu(G)$.

    □