

# 作业 4

11 丛宇 202411081537

May 9, 2025

## 第六章

3. 由欧拉公式  $\phi = m + 2 - n \leq 3n - 6 + 2 - n = 2n - 4$ .
4.
  1. 由于极大平面图所有 face degree 都是 3, 有  $3\phi = 2m$ . 由欧拉公式  $n + 2m/3 - m = 2$  得到  $m = 3n - 6$
  2.  $\phi = 2m/3 = 2n - 4$
  3. 对  $n$  归纳,  $n = 4$  时显然成立. 假设  $G$  为  $k$  个点的极大简单平面图. 若  $\kappa(G) = 1$ ,  $G$  中一定包含 degree 是 1 的点 (简单图), 与极大简单平面图矛盾; 若  $\kappa(G) = 2$ , 则存在两个点  $u, v \in G$  s.t.  $G - \{u, v\}$  使  $G$  不联通. 那么在  $G$  一定可以表示成两个图  $G_1, G_2$  的 2-clique sum. 但是由于  $n > 4$ , 平面图  $G_1$  与  $G_2$  都包含  $u, v$  之外的点, 一定存在  $x \in G_1, y \in G_2$  s.t.  $G + (x, y)$  仍然是平面图, 与极大简单平面图假设矛盾. 因此  $\kappa(G) \geq 3$ .
5. 显然. 假设  $G$  并非极大可平面图, 则存在  $e \notin E$  s.t.  $G + e$  仍然是平面图. 与  $n$  个点的平面图边数  $\leq 3n - 6$  矛盾.
6.
  1. 容易发现  $n \leq 4$  时不是简单图,  $n = 5$  时不是平面图. 所以  $n \geq 6$ . 假设  $G$  中只有 5 个顶点的度数不超过 5, 有  $2m \geq 5 + 16 + 6(n - 5)$ , 得到  $m \geq 3n - 4.5$  与  $m = 3n - 6$  矛盾
  2. 若  $G$  中只有 11 个点度数为 5, 有  $2m \geq 11 \cdot 5 + 6(n - 11)$ , 得到  $m \geq 3n - 11/2$  与  $m = 3n - 6$  矛盾
8.
  1. 如果  $G$  有度数为 2 的点  $u$ , 由于  $n \geq 4$  一定存在一个点  $v$  与  $u$  不相邻, 显然  $G + (u, v)$  仍然是平面图
  2. 假设只有两个度数  $\leq 5$  的点,  $2m \geq 6(n - 2) + 2$ ,  $m \geq 3n - 4$  矛盾
  3.  $2m \geq 6(n - 3) + 9$ ,  $m \geq 3n - 4.5$
25.
  1. matroid  $M$  中的 cocircuit = dual matroid  $M^*$  中的 circuit. planar graph 对应的 graphic matroid dual = planar dual graph 上的 graphic matroid. (互为对偶, 只需要证明一边. 假设  $G$  的 cycle  $C$  在  $G^*$  中的对应  $C^*$  不是 cut, 那么令  $C$  内部的某个 face 对应的顶点为  $v^*$ , 在  $G^*$  中存在  $(v^*, u^*) \in E$  s.t.  $u^*$  对应的 face 不在  $C$  中. 显然  $C$  不是 cycle)
  2. Euler 图的 cut 大小一定是偶数. 由 1 知对偶图中所有 cycle 长度都是偶数. 无奇环一定是二分图.

## 第七章

2. 由推论 2, 简单图点数  $2k + 1$ , 边数  $m = \Delta n / 2 = \frac{2k+1}{2} \Delta > k\Delta$ , 所以  $\chi' = \Delta + 1$ .

3. 如果所有 cycle 长度都是偶数,  $G$  是二分图,  $\chi' = \Delta$ . 如果所有 cycle 长度都是奇数, 由于两个 cycle 的对称差还是 cycle, 观察到任意两个奇环不能共用边, 只能共用点. 将每个奇环看成一个点, 共用顶点的奇环之间连边, 得到的图一定是 forest, 否则包含简单偶环. 由于每个奇环只需要 3 种颜色即可染色且奇环之间形成树 (要求  $G$  联通), 容易看出  $\chi' \leq \Delta$ .
4. 对  $n$  归纳, base case 是  $P_3$ , 显然成立. 假设对所有  $k \leq n-1$  阶满足条件的简单图都有  $\chi' = k-1$ . 现在考虑  $k$  阶满足条件的简单图  $G$ , 其中  $\deg(v) = k-1$ .  $G-v$  满足归纳假设, 有一个  $k-2$  边染色, 所以一定存在一个  $k-1$  边染色. 重复使用  $k-1$  次引理 1 容易推出  $G$  也可  $k-1$  边染色.
5. 如果  $G$  不含任何奇圈, 那么是二分图,  $\chi = 2$ . 如果  $G$  只有一个奇圈, 显然  $\chi = 3$ . 如果  $G$  有多个奇圈, 取其中一个, 记为  $C$ ,  $C$  可以 3 染色. 考虑  $G \setminus C$ , 由于任何两个奇圈都共用顶点, 所以  $G \setminus C$  没有奇圈, 是二分图, 可以 2 染色. 所以  $\chi(G) \leq 2 + 3 = 5$ .
9. 令  $e = (u, v)$ , 假设  $G \setminus e$  颜色最少的染色中  $u, v$  颜色相同, 则该染色在  $G/e$  中也是可行的染色且  $G/e$  中任何可行的染色都得到  $G \setminus e$  中  $u, v$  颜色相同的一个染色. 假设  $G \setminus e$  颜色最少的染色中  $u, v$  颜色不同, 同理任何一种染色对应着  $G$  的染色. 因此  $\chi(G \setminus e) = \min(\chi(G), \chi(G/e))$ .
34.  $P_k(C_n) = P_k(P_n) - P_k(C_{n-1}) = k(k-1)^{n-1} - P_k(C_{n-1})$  展开得到  $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ .
35.  $\sum_{i=0}^k [(i-1)^n + (-1)^n(i-1)](k-i)$

## 第九章

2. 将 cycle 定向为有向环不影响入度出度的差, 所以从  $G$  中删掉所有 cycle. 下面考虑给树定向, 保证  $|\deg_+(u) - \deg_-(u)| \leq 1$ . 任意选择树根, 从树根开始用贪心算法定向即可.
5. 1 强联通. 2 单向联通. 3. 弱联通 4. 单向联通 5. 强联通 6. 强联通
7. 略
11. 对子树 (点数) 做归纳. base case 是只包含一个点的二元树, 显然成立. 对  $T$  中的所有非叶子节点  $u$ , 存在一个以  $u$  为根的二元树, 其左右子树都满足性质  $m = 2t - 2$ , 因此  $m' = m_1 + m_2 + 2 = 2t_1 + 2t_2 - 4 + 2 = 2t - 2$ .